

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2014

Môn thi : TOÁN; khối B

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1: (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1), với m là tham số thực.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m=1$.
- Cho điểm $A(2;3)$. Tìm m để đồ thị (1) có hai cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A.

Câu 2: (1,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$

Câu 3: (1,0 điểm) Tính tích phân $\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$

Câu 4: (1,0 điểm)

- Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z + 3(1-i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tìm môđun của z .
- Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Câu 5: (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(1;0;-1)$ và đường thẳng

d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mp qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d.

Câu 6: (1,0 điểm) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Câu 7: (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD.

Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G(\frac{4}{3};3)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D.

Câu 8: (1,0 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 9: (1,0 điểm) Cho các số thực a, b, c không âm và thỏa mãn điều kiện $(a+b)c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$$

Đáp án

Câu 1:

a) Tập xác định là \mathbb{R} , $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 1$

Hàm số đạt 2 cực trị tại: A $(-1; 3)$ hay B $(1; -1)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

$x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$

Bảng biến thiên

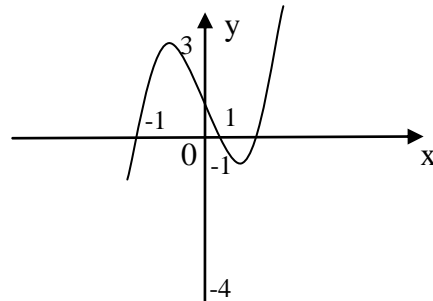
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 3 CĐ	↘ -1 CT	↗ $+\infty$	

Hàm số đồng biến trên 2 khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$

$y'' = 6x; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Điểm uốn I (0; 1)

Đồ thị :



b) $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$

hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Tam giác ABC cân tại A $\Leftrightarrow AB^2 = AC^2$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{m} - 2)^2 + (m\sqrt{m} - 3m\sqrt{m} - 2)^2 = (\sqrt{m} + 2)^2 + (-m\sqrt{m} + 3m\sqrt{m} - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{m} - 4\sqrt{m} + 8m\sqrt{m} + 8m\sqrt{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m}(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (vì } m > 0)$$

Câu 2: $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x - 2 + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2\cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

Câu 3: $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x}\right) dx = (x + \ln|x^2 + x|) \Big|_1^2 = 1 + \ln 3$

Câu 4: a) Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$2(a + bi) + 3(1 - i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow 2a + 2bi + 3(a - bi - ia + bi^2) = 1 - 9i$$

$$\Leftrightarrow 5a - 3b + (-b - 3a)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}. \text{ Vậy: } |z| = \sqrt{13}$$

b) Số cách chọn 3 hộp sữa từ 12 hộp $C_{12}^3 = 220$

Số cách chọn 3 hộp có cả 3 loại $C_5^1 C_4^1 C_3^1 = 60$

Xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại là: $60/220 = 3/11$

Câu 5:

a) Gọi (α) là mặt phẳng qua A (1; 0; -1) và $(\alpha) \perp d$. Ta có: $\vec{a}_d = \vec{n}_\alpha = (2; 2; -1)$

$$\Rightarrow \text{pt } (\alpha): 2(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 3 = 0$$

b) Hình chiếu A lên d là giao điểm I của (α) và d.

$$A \in (d) \Rightarrow x = 2t + 1; y = 2t - 1; z = -t$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 2(2t+1) + 2(2t-1) + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I(5/3; -1/3; -1/3)$$

Câu 6: Gọi H trung điểm AB thì $A'H \perp (ABC)$

Hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên (ABC) là HC. Vậy góc $A'C$ và (ABC) là $A'CH = 60^\circ$

$$\Delta A'HC \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'H}{HC} = \sqrt{3} \Rightarrow A'H = \sqrt{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$V_{LT} = A'H \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Cách 1: Do AB cắt $(A'AC)$ tại A mà H là trung điểm AB nên $d(B, (A'AC)) = 2d(H, (A'AC))$

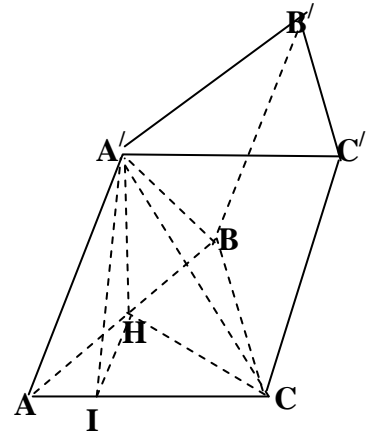
Vẽ $HI \perp AC$, Vẽ $HK \perp A'I$ (1)

Do $AC \perp (A'IH) \Rightarrow AC \perp HK$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow HK \perp (A'AC)$

$$\Delta A'HI \text{ vuông} \Rightarrow HK = \frac{HA' \cdot HI}{A'I} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

$$\text{Vậy } d(B, A'AC) = 2HK = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$



$$\text{Cách 2: } d(B, (A'AC)) = \frac{3V_{A'.ABC}}{dt(\Delta A'AC)} = \frac{V_{LT}}{\frac{1}{2}A'I \cdot AC} = \frac{\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{4} \cdot a} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

Câu 7: Phương trình đường tròn đường kính AB: $(x+3)^2 + y^2 = 10$

$I(a; b)$ là giao điểm của AC và BD

$$\overline{GC} = -2\overline{GI} \Rightarrow C(4-2a; 9-2b) \Rightarrow B(-2-4a; 9-4b) \Rightarrow D(2+6a; 6b-9)$$

$$\overline{HA} = (4a-4; 4b-8) \text{ cùng phương } \overline{HD} = (6a+2; 6b-8) \text{ nên } a = 2b-3$$

$$\Rightarrow A(8b-16; 4b-9) \text{ mà } A \in (C) \Rightarrow (8b-13)^2 + (4b-9)^2 = 10$$

$$b = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow B(-6; 1), D(8; 3) \text{ (loại vì khi đó H không là hình chiếu của B lên AD)}$$

$$\text{hay } b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow B(-2; 3), D(2; 0)$$

Câu 8:

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2) \end{cases}$$

$$DK : x - y \geq 0, y \geq 0, x - 2y \geq 0; 4x - 5y - 3 \geq 0$$

$$(1) (1-y)\sqrt{x-y} + (x-y-1) + (y-1) - (x-y-1)\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y-1)(1-\sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-y)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{(x-y-1)(1-y)}{1+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1) \left[\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{y}} \right] = 0 \Leftrightarrow (1-y)(x-y-1) = 0 \Leftrightarrow y=1 \text{ hay } x = y+1$$

- $y = 1, (2) \Rightarrow 9 - 3x = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} \Leftrightarrow 9 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

• $x = y + 1, (2) \Rightarrow 2y^2 + 3y - 2 = 2\sqrt{1-y} - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y} \text{ (A)}$

Cách 1: (A) $\Leftrightarrow \sqrt{1-y} - 2y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1-y) - 2y\sqrt{1-y} + (2y+1)\sqrt{1-y} - y(2y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-y}(\sqrt{1-y} - y) + (2y+1)(\sqrt{1-y} - y) = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{1-y} + 2y + 1)(\sqrt{1-y} - y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1-y} + 2y + 1 = 0 \text{ (VN)} \\ \sqrt{1-y} - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-y} = y (y \geq 0)$

$\Leftrightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$

Nếu $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ có nghiệm (3;1) và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Cách 2: (A) $\Leftrightarrow 2y^2 + y = 2(\sqrt{1-y})^2 + \sqrt{1-y} \text{ (*)}$

Xét $f(t) = 2t^2 + t, t \geq 0, f'(t) = 4t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

(*) $\Leftrightarrow y = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$

Nếu $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ có nghiệm (3;1) và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Câu 9:

Từ điều kiện ta có $c > 0$ và $a + b > 0$

$P = \sqrt{\frac{a/c}{b/c + 1}} + \sqrt{\frac{b/c}{a/c + 1}} + \frac{1}{2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)} = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{2(x+y)}$ với $x = \frac{a}{c} \geq 0, y = \frac{b}{c} \geq 0$

Ta có $\sqrt{\frac{x}{y+1}} \geq \frac{2x}{x+y+1}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$ hay $x = y + 1$

Ta có $\sqrt{\frac{y}{x+1}} \geq \frac{2y}{x+y+1}$ Dấu “=” xảy ra khi $y = 0$ hay $y = x + 1$

$P \geq \frac{2(x+y)}{(x+y)+1} + \frac{1}{2(x+y)} = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{2t}$ với $t = x + y > 0$

Xét $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{2t}, f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{2t^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 = (t+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \\ t = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}$

$$\text{Vậy } P \text{ có giá trị nhỏ nhất là } \frac{3}{2} \text{ khi } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \\ b=0 \\ a=c \end{cases}$$

Phạm Viết Kha, Nguyễn Văn Hân, Trần Minh Quang
(Trường THPT Vĩnh Viễn – TP.HCM)