

**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2014**

**Môn : TOÁN - Khối : A và A1**

**Câu 1 (2,0 điểm)** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng  $y = -x$  bằng  $\sqrt{2}$

**Câu 2 (1,0 điểm)** Giải phương trình  $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

**Câu 3 (1,0 điểm)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^2 - x + 3$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$

**Câu 4 (1,0 điểm)**

a) Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z + (2+i)\bar{z} = 3+5i$ . Tìm phần thực và phần ảo của  $z$ .

b) Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn?

**Câu 5 (1,0 điểm)** Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  $2x + y - 2z - 1 = 0$  và

đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$ . Tìm tọa độ giao điểm của  $d$  và (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa  $d$  và vuông góc với (P).

**Câu 6 (1,0 điểm):** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SD = \frac{3a}{2}$ , hình

chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBD)$ .

**Câu 7 (1,0 điểm):** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông  $ABCD$  có điểm  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$  và  $N$  là điểm thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $AN = 3NC$ . Viết phương trình đường thẳng  $CD$ , biết rằng  $M(1;2)$  và  $N(2;-1)$ .

**Câu 8 (1,0 điểm):** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases} (x,y \in \mathbb{R})$

**Câu 9 (1,0 điểm) :** Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$$

**BÀI GIẢI**

**Câu 1:**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

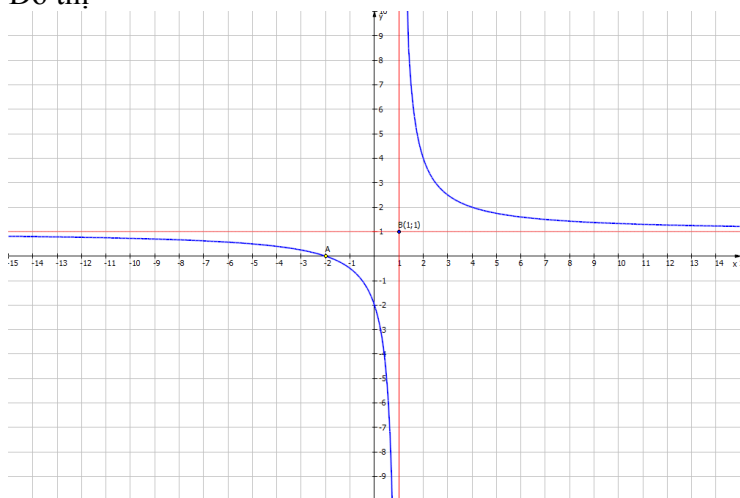
$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ , nên  $x = 1$  là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$  nên tiệm cận ngang là  $y = 1$

Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y'$	$0$	$-$	$0$
$y$	$1$	$+\infty$	$1$

Đồ thị



b) Gọi M  $(x; \frac{x+2}{x-1})$ . Yêu cầu bt tương đương:  $\left| \frac{\frac{x+2}{x-1} + x}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |x + 2 + x^2 - x| = 2|x - 1| \Leftrightarrow |x^2 + 2| = 2|x - 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \text{ hay } x = 0.$$

Vậy có 2 điểm M là  $(-2; 0)$  và  $(0; -2)$ .

**Câu 2:**  $\sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sin x + 2 - 4\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 2) - (\sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \text{ (vì } \sin x - 2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

**Câu 3:** Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và đường thẳng là

$$x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 2$$

Ta có khi  $1 \leq x \leq 2$  thì  $x^2 - x + 3 \leq 2x + 1$

$$S = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 = \left( -\frac{1}{3}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 2 \cdot 2 \right) - \left( -\frac{1}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 - 1 \cdot 2 \right)$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

**Câu 4:**

a)  $z + (2+i)\bar{z} = 3+5i$

Gọi  $z = a + ib$ , ta có phương trình đã cho thành:  $z$

$$a + ib + (2+i)(a-ib) = 3 + 5i$$

$$\Leftrightarrow 3a - ib + b + ia = 3 + 5i \Leftrightarrow 3a + b = 3 \text{ và } a - b = 5 \Leftrightarrow a = 2 \text{ và } b = -3.$$

b) Gọi A: “Chọn được 4 thẻ chẵn”

Chọn 4 thẻ trong 16 thẻ có  $C_{16}^4 = 1820$  cách chọn

Số phần tử không gian mẫu  $n(\Omega) = 1820$

Chọn 4 thẻ trong 8 thẻ đánh số chẵn có  $C_8^4 = 70$  cách chọn

Số phần tử biến cố A:  $n(A) = 70$

Xác suất để chọn được 4 thẻ đều chẵn

$$P(A) = \frac{70}{1820} = \frac{1}{26}$$

**Câu 5 :**

a)  $I \in d \Rightarrow I(2+t; -2t; -3+3t)$

$I \in (P) \Rightarrow 2(2+t) - 2t - 2(3t-3) - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{3}{2}$ . Vậy  $I\left(\frac{7}{2}; -3; \frac{3}{2}\right)$

b) (d) qua A(2; 0; -3) và VTCP  $\vec{a} = (1; -2; 3)$

( $\alpha$ ) có PVT là  $\vec{n} = (2; 1; -2)$

Gọi ( $\alpha$ ) là mp qua d và vuông góc (P) thì ( $\alpha$ ) có VTPT là  $\vec{a} \wedge \vec{n} = (1; 8; 5)$

PT ( $\alpha$ ) là :  $1(x-2) + 8(y-0) + 5(z+3) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 5z + 13 = 0$

**Câu 6 :** Gọi M là trung điểm của AB.

$$CM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow$$

$$SM^2 = SC^2 - MC^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \frac{5a^2}{4} = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 a = \frac{a^3}{3}. \text{ Ta có } MH = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Gọi h là chiều cao từ M của tam giác SMH

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$$

Vì  $AB = 2AM \Rightarrow d(A; SBD) = 2d(M; SBD) = \frac{2a}{3}$

**Câu 7 :** Gọi I giao điểm MN và CD

$$\Delta NAM \sim \Delta NCI \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NM}{NI} = 3 \Rightarrow \vec{NI} = \frac{1}{3} \vec{MN}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = \frac{1}{3}(1) \\ y_1 + 1 = \frac{1}{3}(-3) \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\frac{7}{3}; -2\right)$$

Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là VTPT của AB

pt (AB) :  $a(x-1) + b(y-2) = 0$

pt (CD) :  $a\left(x - \frac{7}{3}\right) + b(y+2) = 0$

Đặt  $AB = x (x > 0) \Rightarrow MH = \frac{x}{4}; NH = \frac{3}{4}x$

Ta có :  $MN^2 = MH^2 + NH^2 \Rightarrow x = 4$

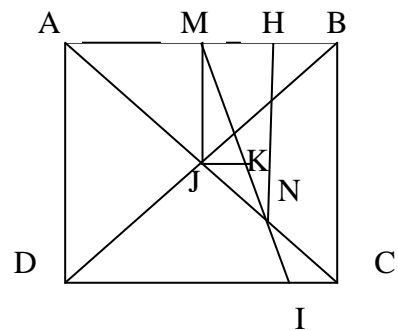
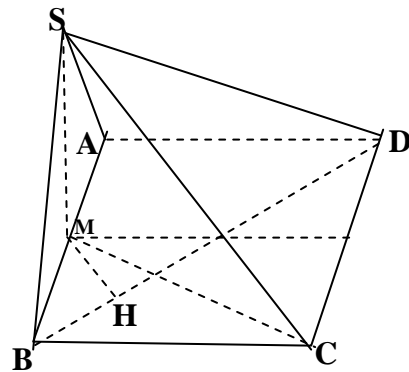
$d(M; CD) = 4 \Leftrightarrow |-a+3b| = 3\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 3ab = 0$

Với  $b = 0 \Rightarrow a = 0$  (loại)

Với  $b \neq 0$  chọn  $b = 1 \Rightarrow a = 0$  hoặc  $a = -\frac{3}{4}$

Vậy phương trình CD là :  $y + 2 = 0$  hoặc  $3x - 4y - 15 = 0$

Cách 2: Gọi I giao điểm MN và CD



$$\Delta NAM \sim \Delta NCI \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NM}{NI} = 3 \Rightarrow \overline{NI} = \frac{1}{3} \overline{MN}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I - 2 = \frac{1}{3}(1) \\ y_I + 1 = \frac{1}{3}(-3) \end{cases} \cdot \text{Vậy } I \left( \frac{7}{3}; -2 \right)$$

VTCP của MN là  $\vec{a} (1; -3)$

VTCP của CD là  $\vec{b} (m; n)$

$$\cos(MN, CD) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 8n^2 - 6mn = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ hay } n = \frac{3m}{4}$$

+ TH1:  $n = 0 \Rightarrow CD : y + 2 = 0$

+ TH2:  $n = \frac{3m}{4} \Rightarrow CD : 3x - 4y - 15 = 0$

**Câu 8:**

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ 12 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

**Cách 1:**

Đặt  $a = \sqrt{12-y}$ ,  $a \geq 0 \Rightarrow y = 12 - a^2$

$$(1) \Leftrightarrow xa + \sqrt{(12-a^2)(12-x^2)} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2} = 12 - xa$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ 12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2 = 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot xa + x^2a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ 12x^2 - 2 \cdot 12xa + 12a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ (x-a)^2 = 0 \end{cases}$$

Ta có  $(x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y}$  (\*)

Thế (\*) vào (2) được :  $(12-y)\sqrt{12-y} - 8\sqrt{12-y} - 1 = 2\sqrt{y-2}$

$$\Leftrightarrow (4-y)\sqrt{12-y} = 2\sqrt{y-2} + 1$$

$$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y} + \sqrt{12-y} - 3 + 2 - 2\sqrt{y-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y} + \frac{3-y}{\sqrt{12-y}+3} + \frac{2(3-y)}{1+\sqrt{y-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{12-y} + \frac{1}{\sqrt{12-y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{y-2}} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

**Cách 2:**

Ta có  $x\sqrt{12-y} + \sqrt{(12-x^2)y} \leq \sqrt{(x^2+12-x^2)(12-y+y)} = 12$

Đấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-y^2}} = \frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x\sqrt{y} = \sqrt{(12-y)(12-x^2)}$  (3)

Khi đó (1) tương đương với (3)

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2y = 144 - 12x^2 - 12y + x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12y = 144 - 12x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases} \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) + 2 \cdot \frac{1-(10-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) + 2 \cdot \frac{9-x^2}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[ x^2+3x+1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2+3x+1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0 \quad (\text{vô nghiệm vì } x \geq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$$

Vậy  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

**Cách 3:**

Đặt  $\vec{a} = (x; \sqrt{12-x^2}), \vec{b} = (\sqrt{12-y}; \sqrt{y})$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{12}$$

$$(1) \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 = 2\sqrt{10-x^2} - 2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) = 2 \frac{(3-x)(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 3$$

$$(x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x) = 0$$

Đặt  $f(x) = (x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x)$

$f'(x) < 0 \forall x > 0 \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hpt trên: (3;3)

**Câu 9:**

Ta có:  $2x(y+z) \leq x^2 + (y+z)^2 = 2 + 2yz \Rightarrow yz + 1 \geq x(y+z)$

$$\frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} \leq \frac{x^2}{x^2 + x + x(y+z)} = \frac{x^2}{x + y + z + 1}$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{x}{x + y + z + 1} + \frac{y+z}{x + y + z + 1} - \frac{1+yz}{9} = 1 - \left( \frac{1}{x + y + z + 1} + \frac{1+yz}{9} \right)$$

Theo BĐT BCS ta có :  $x + (y+z) \leq \sqrt{2(x^2 + (y+z)^2)} = 2\sqrt{1+yz}$

$$\text{Do đó : } T = \frac{1}{1 + 2\sqrt{1+yz}} + \frac{1+yz}{9} = \frac{1}{2u+1} + \frac{u^2}{9} \geq \frac{4}{9}, \forall u = \sqrt{1+yz} \geq 1$$

$$\Rightarrow P \leq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Khi  $x = y = 1$  và  $z = 0$  hay  $x = z = 1$  và  $y = 0$  thì  $P = \frac{5}{9}$

Vậy  $\text{Max } P = \frac{5}{9}$ .

Trần Minh Quang, Hà Văn Chương, Võ Lý Văn Long, Nguyễn Văn Hân  
(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)